数理解析研究所講究録
507巻 1983年 16-32

ARIMA processes における種々の統計量の漸近的性質について

東京工大・理 矢島美寛 (Yoshihiro Yajima)

§1. 序

確率過程 $\{w_t\}$ が、次式をみたす時、ARIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ process と呼ばれる。(Box and Jenkins (1976))

$$\phi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla_s^D w_t=\theta(B)\Theta(B^s)e_t,$$

(i) $\{e_t\}$; i.i.d. $N(0,\sigma_e^2)$,

(ii) $Bw_t \underset{\mathrm{d}}{=} w_{t-1}$, $\nabla \underset{\mathrm{d}}{=} 1-B$, $\nabla_s \underset{\mathrm{d}}{=} 1-B^s$,

(iii) $\phi(B)=1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i B^i$, $\theta(B)=1-\sum_{i=1}^{q}\theta_i B^i$,

$\Phi(B^s)=1-\sum_{i=1}^{P}\Phi_i B^{is}$, $\Theta(B^s)=1-\sum_{i=1}^{Q}\Theta_i B^{is}$,

(iv) $\phi(z),\theta(z),\Phi(z),\Theta(z)$ はすべて単位円外に根をもつ。

Box-Jenkins の identification の方法では、sample autocorrelation, sample partial autocorrelation が、主要な道具となる。しかし非定常過程の場合、定常の時とは異なり、エルゴード性、中心極限定理が成立せず、これらの統計量の性質はあま

り知られていない。（注．非定常過程においては、時点ごとに、真の autocorrelation , partial autocorrelation は変化する。本論では、定常過程において定義されたのと、同様の方法で構成された統計量を、非定常の際にも便宜的に sample autocorrelation , sample partial autocorrelation と呼ぶ。）

ここでは Hasza and Fuller (1979) ($d=2, D=0$), (1982) ($d=1, D=1$) の用いた方法を一般化することにより、一般の d, D について、これらの統計量の漸近的性質を明らかにする。またこれらの結果に関連する、二，三の応用例について報告する。

§2. The sample autocorrelations and partial autocorrelations

従来、sample autocorrelation については、Hasza (1980) が、$d=1$, $P=D=Q=0$ の場合を、sample partial autocorrelation については、Hamilton and Watts (1978) が、$d=D=0$ (stationary) の場合を、各々論じている。ここでは一般の D 及び d について考察する。

仮定（一般性を失わない）

(i) $\Phi(B^s) \equiv \Theta(B^s) \equiv 1$ (i.e. $P=Q=0$)

(ii) ここで考える ARIMA $(p,d,q)\times(0,D,0)_s$ モデルは、「初期条件として、確率変数の集合、$\{W_t; -Ds-d+1$

$\leq t \leq 0\}$ s.t. $EW_t^2 < \infty$ と、確率変数列$\{e_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ i.i.d. $N(0, \sigma_e^2)$ とが、与えられ、

$$\phi(B)\nabla^d \nabla_S^D w_t = \theta(B) e_t, \; t \geq 1,$$

をみたす w_t を意味する。

本論での目的のためには、以下で定義する $D_T^{-1} W_T' W_T D_T^{-1}$ の漸近分布が必要となる。W_T は $(T-DS-d) \times (DS+d)$ の行列で、その (i,j) 要素は、

$$\nabla^d \nabla_S^{D-j^*} w_{DS+d+i-j}, \; (j^*-1)S+1 \leq j \leq j^* S, \; 1 \leq j^* \leq D,$$

$$\nabla^{d-j^*} w_{DS+d+i-j}, \; j = DS + j^*, \; 1 \leq j^* \leq d.$$

一方 D_T は、$(DS+d) \times (DS+d)$ の対角行列で、その (i,i) 要素は

$$T^{i^*}, \; (i^*-1)S+1 \leq i \leq i^* S, \; 1 \leq i^* \leq D,$$

$$T^{D+i^*}, \quad i = DS + i^*, \; 1 \leq i^* \leq d.$$

$\mathbb{W}$ を、$D_T^{-1} W_T' W_T D_T^{-1}$ が法則収束 $(T \to \infty)$ する分布をもつ、random な行列とする。（具体的な形は、最後の Appendix で与える。）

<u>Sample autocorrelations</u>

観測値を、$\{w_1, w_2, \cdots, w_T\}$ として、sample autocorrelation を、

$$\hat{r}(k) = \sum_{t=1}^{T-k} (w_t - \overline{w}_T)(w_{t+k} - \overline{w}_T) \Big/ \sum_{t=1}^{T} (w_t - w_T)^2$$

で定義する。ここで $\overline{w}_T = \sum_{t=1}^{T} w_t / T$.

定理 1　$x_t \underset{\mathrm{d}}{=} \nabla^d \nabla_s^D w_t$ (stationary ARMA process)

$\gamma(k) \underset{\mathrm{d}}{=} E x_t x_{t+k}$

(i) $D=1, d=0$,

$$\hat{\gamma}(k) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_1(k^*), \quad k=ns+k^*, \ 0<k^*\leq s-1,$$

$$T\{1-\hat{\gamma}(k)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} nZ_2+f(n)Z_3, \quad k=ns.$$

(ii) $D\geq 2, d=0$,

$$\hat{\gamma}(k) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_1(k^*), \quad k=ns+k^*, \ 0<k^*\leq s-1,$$

$$T\{1-\hat{\gamma}(k)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} nZ_4 \quad , \ k=ns.$$

(iii) $D\geq 1, d\geq 1$,

$$T\{1-\hat{\gamma}(k)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} kZ_5.$$

$Z_1(k^*)$, Z_i, $2\leq i\leq 5$ は確率変数で W の各要素、及び $S_3(m,k)$，λ_j, $0\leq j\leq s-1$,（各々、Appendix で具体的に定義）を用いて、表現できる。$f(n) \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=-n+1}^{n-1}(n-|i|)\gamma(is)/2$

Remark 1

(i) $Z_1(k^*)$, $Z_2 \sim Z_5$ はすべて，$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} V_i A_{ij} V_j \Big/ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} V_i B_{ij} V_j$ という形である。$\{V_i\}$ は、i.i.d. $N(0,\sigma_e^2)$. A_{ij}, B_{ij} は定数で、解析的に表現可能であるが非常に複雑である（分母は w.p. 1 で non-zero）

(ii) 定理より $\hat{\gamma}(k)$ の形状に関し、以下の事がわかる。

(a) $d\geq 1, D\geq 1$ の時 $\operatorname*{p\text{-}lim}_{T\to\infty}\hat{\gamma}(k)=1, \ ^{\forall}k$. そして k が増大する時、linear に減衰する。（傾きはサンプルに

依存する。)

(b) $d=0,\ D\geq 2$ の時、$\underset{T\to\infty}{p\text{-}\lim}\ \hat{r}(k)=1,\ k=ns$. $\hat{r}(ns)$ は n に関して、linear に減衰. $k\equiv k'\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ s)$ の時、$\hat{r}(k),\ \hat{r}(k')$ は、同じ分布へ収束

(c) $d=0,\ D=1$ の時、$\underset{T\to\infty}{p\text{-}\lim}\ \hat{r}(k)=1,\ k=ns$. ただし $\hat{r}(ns)$ は、n に関して linear に減衰するとはかぎらない。($\rho(n)$ の影響) $\{x_t\}$ が $MA(q)$ process $(q<s)$ 等であれば、$\rho(n)=\frac{n}{2}\gamma(0)$ となり、linear に減衰.

(iii) 定理1で、$s=1$ とおけば、$d=D=0$ (stationary) を除いて、すべての場合を尽くしている。

<u>Sample partial autocorrelation</u>

$\{\hat{\beta}_1(k),\hat{\beta}_2(k),\cdots,\hat{\beta}_k(k)\}$ を、

$$\sum_{t=k+1}^{T}\{w_t-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(k)w_{t-i}\}^2/(T-k)$$

を最小にする、$\{\beta_1(k),\beta_2(k),\cdots,\beta_k(k)\}$ とする。

$\hat{\beta}_k(k)$ を lag k の sample partial autocorrelation、同様に $\hat{\alpha}_k(k)$ を $x_t=\nabla^d\nabla_s^D w_t$ の lag k の sample partial autocorrelation と呼ぶ。

<u>定理2.</u> $Pr\{\det W\neq 0\}=1$ を仮定.

(i) $1\leq k\leq d,\quad \hat{\beta}_k(k)\xrightarrow[p]{}(-1)^{k+1},\ (T\to\infty)$,

(ii) $(i-1)s+d<k\leq is+d,\ 1\leq i\leq D$,

(a) $k=is+d,\quad \hat{\beta}_k(k)\xrightarrow[p]{}(-1)^{i+d+1},\ (T\to\infty)$,

(b) $k \neq is+\alpha$, $\hat{\beta}_k(k)$ は一般に退化しない分布へ法則収束

(iii) $k > DS+\alpha$, $\hat{\beta}_k(k) = (-1)^{D+\alpha}\,\hat{\phi}_{k-DS-\alpha}(k-DS-\alpha) + O_p(1/T)$.

（略証）(i); $\mathbb{D}_k$ を $(k+1)\times(k+1)$ 行列で、

$$\mathbb{D}_k = (\tilde{\mathbb{C}}_{k,0},\ L\tilde{\mathbb{C}}_{k-1,0},\ \cdots,\ L^k\tilde{\mathbb{C}}_{0,0})'$$

と定義する。　ここで

$$\tilde{\mathbb{C}}_{i,j} \underset{\alpha}{=} (C_{i,j,0},\ C_{i,j,1},\ \cdots,\ C_{i,j,js+i},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)',$$

また

$$\sum_{l=0}^{js+i} C_{i,j,l}B^l \underset{\alpha}{=} (1-B)^i(1-B^s)^j .$$

一方 L は $(k+1)\times(k+1)$ の行列で、その (i,j) 要素は、$i-j=1$ の時は 1、$i-j\neq 1$ の時は 0。$\underset{\sim}{\alpha}(k) = \{1, -\hat{\alpha}_1(k), \cdots, -\hat{\alpha}_k(k)\}'$ を次式で与える。

$$\underset{\sim}{\alpha}(k) = (\mathbb{D}_k')^{-1}\underset{\sim}{\beta}(k),$$

ここで、$\underset{\sim}{\beta}(k) = \{1, -\hat{\beta}_1(k), \cdots, -\hat{\beta}_k(k)\}'$。仮定および Appendix の結果より、

$$\operatorname*{p-lim}_{T\to\infty} \hat{\alpha}_l(k) = 0,\ {}^\forall l,$$

を得る。$(-1)C_{k,0,k} = (-1)^{k+1}$ に注目すれば、結論を得る。

(ii); (i) と同様の論法で、結論を得る。

(iii); $\mathbb{D}_{\alpha,D,k}$ を $(k+1)\times(k+1)$ 行列で、その第 i 行を、

$$(L^{i-1}\hat{\mathbb{C}}_{\alpha,D})',\quad 1 \leq i \leq k+1-DS-\alpha,$$

$$(L^{i-1}\tilde{\mathbb{C}}_{\alpha,i^*})',\quad k+2-(i^*+1)S-\alpha \leq i \leq k+1-i^*S-\alpha,$$

$$0 \leq i^* \leq D-1,$$

$$(L^{i-1}\tilde{c}_{k+1-i,0})', \quad k+2-d \leq i \leq k+1,$$

とする。$\mathbb{X}_T$ を $(T-k)\times(k-DS-d)$ 行列で、その (i,j) 要素を x_{k+i-j}，$\tilde{x}_T$ を $(T-k)$ 次元ベクトルで、$\tilde{x}_T=(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_T)'$ とする。その時、仮定および Appendix の結果より、

$$\underset{\sim}{\beta}(k) = \mathbb{D}'_{d,D,k} \begin{pmatrix} 1 \\ (\mathbb{X}_T'\mathbb{X}_T)^{-1}\mathbb{X}_T'\tilde{x}_T + O_p(1/\sqrt{T}) \\ O_p(1/T) \end{pmatrix}$$

を得る。よって結論が成立する。

§3.応用例

§2. で論じた結果の応用例として、通常の ARI(p,d) process，$\phi(B)\nabla^d W_t = e_t$ を、非定常 AR(p+d) process と、みなした場合の係数推定、次数 (p+d) 決定について考える。

係数推定

$$1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2-\cdots-\varphi_{p+d}B^{p+d} \underset{\overline{d}}{=} \phi(B)\nabla^d.$$

定理3 $\quad P_r\{\det W \neq 0\}=1$ を仮定.

$$\hat{\varphi} \underset{\overline{d}}{=} (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \cdots, \hat{\varphi}_{p+d})',$$

$$\varphi \underset{\overline{d}}{=} (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{p+d})'.$$

とする。この時.

$$\sqrt{T}(\hat{\varphi}-\varphi) \xrightarrow[L]{} N(0, \sigma_e^2 \underset{\sim}{D}'\Gamma_p^{-1}\underset{\sim}{D}) \; (T\to\infty).$$

ここで、$\underset{\sim}{D}$, Γ_p は各々、$p\times(p+d)$, $p\times p$ の行列で

$$\underset{\sim}{D} \overset{=}{\scriptstyle d} \begin{bmatrix} 1 & C_{d,1} & C_{d,2}, \cdots, C_{d,d} & & & 0 \\ & 1 & C_{d,1}, C_{d,2}, & \cdots & C_{d,d} & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & \\ & & & 1 & C_{d,1} \ C_{d,2} \cdots & C_{d,d} \end{bmatrix}, \quad 1+\sum_{i=1}^{d} C_{d,i}B^i \overset{=}{\scriptstyle d} (1-B)^d,$$

$$\Gamma_p \overset{=}{\scriptstyle d} \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \gamma(1) \\ \gamma(p-1) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

$x_t \overset{=}{\scriptstyle d} \nabla^d W_t$, $\gamma(h) \overset{=}{\scriptstyle d} E x_t x_{t+h}$ で定義される。

証明は、定理2.(iii)と同様.

<u>Remark 2.</u>

$\sqrt{T}(\hat{\varphi}-\varphi)$ の漸近分布は、退化した正規分布である。($\mathrm{rank}\, p$)。ちなみに $p=0, d=1$ の L.S.E の漸近分布は、White (1958), M. M. Rao (1978), Evans and Savin (1981) が論じている。$\hat{\varphi}=\sum_{t=1}^{T-1} W_t W_{t+1} / \sum_{t=2}^{T} W_t^2$ となり、定理1.(1) ($s=1$) より、consistency の order は $1/T$ である。($\varphi=1$)。

<u>次数決定</u>

次数決定に AIC を用いた場合を考える。

$$AIC(k) \overset{=}{\scriptstyle d} T \log \hat{\sigma}_e^2(k) + 2k, \quad 0 \le k \le K,$$

ここで、$\hat{\sigma}_e^2(k) \overset{=}{\scriptstyle d} \min_{\beta_i(k)} \sum_{t=k+1}^{T} \{ W_t - \sum_{i=1}^{k} \beta_i(k) W_{t-i} \}^2 / T$.

この時、Shibata(1976)の結果が、非定常ARI過程についても、そのまま成立する。

<u>定理4</u>. $Pr\{\det W \neq 0\} = 1$ を仮定。

$\hat{k} \equiv AIC(k)$ を最小にする k.

$$\lim_{T\to\infty} Pr\{\hat{k}=k\} = \begin{cases} p_{k-(p+d)}\, q_{\bar{k}-k}, & (p+d \le k \le \bar{k}),\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

(記号はShibata(1976)と同じ定義)

(略証) まず、仮定とAppendixの結果より

$$\hat{\sigma}_e^2(k) = O_p(T^{2(d-k)-1}), \quad k<d,$$

$$p\text{-}\lim_{T\to\infty} \hat{\sigma}_e^2(k) = \sigma_{k-d}^2, \quad k\ge d,$$

を証明する。σ_k^2 は、$x_k, x_{k-1}, \cdots, x_1$ が与えられた時の、x_{k+1} に対する最良予測量の二乗予測誤差. $k<p+d$ の時は、これらの結果より、ただちに証明される。$k \ge p+d$ の時は、まず $x_t = \nabla^d w_t$ とし、$\tilde{\sigma}_e^2(k)$ を

$$\tilde{\sigma}_e^2(k) = \min_{\phi_i(k)} \sum_{t=k+1}^{T} \{x_t - \sum_{i=1}^{k} \phi_i(k) x_{t-i}\}^2/T$$

で定ギする。この時、

$$\{\hat{\sigma}_e^2(k+1)/\hat{\sigma}_e^2(k)\} - \{\tilde{\sigma}_e^2(k+1-d)/\tilde{\sigma}_e^2(k-d)\} = o_p(1/T)$$

が証明されれば、Shibata(1976)と、同様の手続きで、定理を得る。上式は、左辺の各項を, $\hat{\phi}_{k+1}(k+1)$, $\tilde{\phi}_{k+1-d}(k+1-d)$ を用いて表現した後、定理2. 及び冒頭の結果より示される。

<u>Remark 3</u>.

(i) Hannan and Quinn (1979) は、定常AR過程に対し、$AIC(k)$ を $\phi(k)$ ≂ $T\log\hat{\sigma}_e^2(k) + 2kC\log\log T$, $C>1$, のように修正すれば、$\phi(k)$ を最小にする $\hat{k}$ は、consistent (概収束) であることを示した。$\phi(k)$ を非定常ARI過程に用いても、consistency が言える。(ただし、目下のところ確率収束まで)。

(ii) 定理ｘの意味することは、

(a) Shibata (1976) の結果は、定常、非定常に関わりなく、AR型のprocessに対して成立すること、

(b) 対象とするprocessが、ARI processと想定される場合、p 及び d の決定が必要であるが、その第一段階として、$p+d$ の推定にAICが有効であること、

の以上、二点が挙げられる。

Appendix

§2, §3, の結論及び、仮定のcheckに必要となる、$D_T^{-1}W_T'W_TD_T^{-1}$ の漸近分布について、もとめ方の概略を述べる。手順は二段階よりなる。

(1) $\{U_t\}$ を ARIMA $(0,0,0)\times(0,D+d,0)_s$ process, i.e. $\nabla_s^{D+d}U_t = e_t$, $t\geq 1$, として、$\{W_t\}$ を $\{U_t\}$ により表現する。

(2) $\widehat{D}_T^{-1}\mathbb{U}_T'\mathbb{U}_T\widehat{D}_T^{-1}$ の漸近分布をもとめる。ここで $\mathbb{U}_T$ は、$\{T-(D+d)S\}\times(D+d)S$ 行列で、その (i,j) 要素は、

$$\nabla_S^{D+d-j^*}u_{(D+d)S+i-j},\quad (j^*-1)S+1\leq j\leq j^*S,$$
$$1\leq j^*\leq D+d,$$

により定義され、$\widehat{D}_T$ は、$(D+d)S\times(D+d)S$ の対角行列で、その (i,i) 要素は、

$$T^{i^*},\quad (i^*-1)S+1\leq i\leq i^*,\quad 1\leq i^*\leq D+d .$$

◎ $\{u_t\}$ は、「S個の独立なARIMA$(0,D+d,0)$ process より構成される」とみなせるので、$\widehat{D}_T^{-1}\mathbb{U}_T'\mathbb{U}_T\widehat{D}_T^{-1}$ の漸近分布は、Hasza and Fuller (1979), (1982), Yajima (1982) の analogy で導ける。

補題 A.1.

(i) $0\leq i\leq d,\ 0<j\leq D,\ {}^\forall h,$

$$\operatorname*{p-lim}_{t\to\infty}(\nabla^{d-i}\nabla_S^{D-j}w_t-\nabla^{d-i}\nabla_S^{D-j}w_{t+hS})/t^{i+j-1/2}=0,$$

(ii) $0<i\leq d,\ 0\leq j\leq D,\ {}^\forall h,$

$$\operatorname*{p-lim}_{t\to\infty}(\nabla^{d-i}\nabla_S^{D-j}w_t-\nabla^{d-i}\nabla_S^{D-j}w_{t+h})/t^{i+j-1/2}=0,$$

(iii) $0\leq i\leq d,\ 0\leq i'\leq d,\ 0<j\leq D,\ 0<j'\leq D,\ {}^\forall h,{}^\forall \ell,{}^\forall m,{}^\forall n,$

$$\operatorname*{p-lim}_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(\nabla^{d-i}\nabla_S^{D-j}w_{t+m}\nabla^{d-i'}\nabla_S^{D-j'}w_{t+n}-\nabla^{d-i}\nabla_S^{D-j}w_{t+hS+m}$$
$$\times\nabla^{d-i'}\nabla_S^{D-j'}w_{t+\ell S+n})/T^{i+i'+j+j'}=0,$$

(iv) $0<i\leq d,\ 0<i'\leq d,\ 0\leq j\leq D,\ 0\leq j'\leq D,\ {}^\forall h,{}^\forall \ell,{}^\forall m,{}^\forall n,$

$$p\text{-}\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\left(\nabla^{d-i}\nabla_s^{D-j}w_{t+m}\nabla^{d-i'}\nabla_s^{D-j'}w_{t+n}-\nabla^{d-i}\nabla_s^{D-j}w_{t+h+m}\right.$$
$$\left.\times\nabla^{d-i'}\nabla_s^{D-j'}w_{t+l+n}\right)/T^{i+i'+j+j'}=0.$$

証明は二次モーメントを評価すれば、明らか。

以下で、いくつかの記号を導入する。

◎ $\phi_i^* \underset{\alpha}{=} -\sum_{j=0}^{p'}\phi_{js+i}$, $\theta_i^* \underset{\alpha}{=} -\sum_{j=0}^{q'}\theta_{js+i}$.

ここで $p'=[p/s]$, $q'=[q/s]$, $\phi_0=\theta_0=-1$,

$\phi_i=0,\ i>p$, $\theta_i=0,\ i>q$.

◎ $\widehat{\Phi} \underset{\alpha}{=} [\Phi^*, M\Phi^*, \cdots, M^{s-1}\Phi^*]'$

$\widehat{\Theta} \underset{\alpha}{=} [\Theta^*, M\Theta^*, \cdots, M^{s-1}\Theta^*]'$

は各々、$s\times s$ の巡回行列で、Φ^*, Θ^*, M は各々、

$\Phi^* \underset{\alpha}{=} (\phi_0^*, \phi_1^*, \cdots, \phi_{s-1}^*)'$, $\Theta^* = (\theta_0^*, \theta_1^*, \cdots, \theta_{s-1}^*)'$,

$$M \underset{\alpha}{=} \begin{bmatrix} 0\cdots 0 & 1 \\ I_{s-1} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\end{bmatrix}_{s\times s},$$

で定義される。I_{s-1} は $(s-1)\times(s-1)$ の単位行列.

補題A.2. $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Theta}$ は non-singular

（略証） 巡回行列の行列式に関する公式、及び、

stationarity, invertibility に関する仮定より示せる.

補題A.2より $\Delta(\underset{\alpha}{=}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{\Theta})$ も non-singular な $s\times s$ 巡回行列となる。以上の結果を用いて w_t の u_t による表現を得る。

命題 A.1.　$\lambda_j,\ 0 \le j \le S-1$ を Λ の $(1,\ j+1)$ 要素とする。

$$\nabla^{d-j}\nabla_S^{D-i} w_t = S^{j-1}\lambda^* \sum_{l=0}^{S-1} \nabla_S^{D+d-i-j} u_{t-l} + o_p(t^{i+j-1/2}),\quad j\ge 1,$$

$$= \sum_{l=0}^{S-1}\lambda_l \nabla_S^{D+d-i} u_{t-l} + o_p(t^{i-1/2}),\quad j=0,$$

ここで $\lambda^* \underset{d}{=} \sum_{l=0}^{S-1} \lambda_l$.

証明は補題 A.1 を繰り返し用いる。Λ が non-singular より $\lambda^* \neq 0$ が言える。

次に第二段階の、$\hat{D}_T^{-1} U_T' U_T \hat{D}_T^{-1}$ の漸近分布をもとめるために、一連の定数、確率変数を導入する。

（定数）　$\tilde{B}_{2i}$; ベルヌーイ定数

$$\gamma_i = (-1)^{i+1}\, 2 / \{(2i-1)\pi\},\quad i \ge 1,$$

$$\nu_i = 2^{2(i+1)}\{2^{2(i+1)}-1\}\tilde{B}_{2(i+1)}/(2i+2)!,\quad i \ge 0,$$

$$\mu_{i,j} \begin{cases} = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} \gamma_i^{2(n-l)}/(2l)! , & j=2n, \\ = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} \gamma_i^{2(n-l)}/(2l+1)! + (-1)^n \gamma_i^{2n+1}, & j=2n+1, \end{cases}$$

$$\rho_{i,j,k} = \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-1} 2(-1)^{l+m}(m-l)\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{m}$$

$$\times \int_0^1\int_0^x (1-x^{2k-2-l-m})\, x^l y^m \cos\frac{(2i-1)\pi x}{2} \cos\frac{(2j-1)\pi y}{2}\, dx\, dy.$$

（確率変数）

$$\{V_{ij}\};\ 0 \le i \le S-1,\ 1 \le j < \infty,\ \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2),$$

$$S_1(m,k,l) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{2m} V_{kn} V_{ln},$$

$$S_2(m,k) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{2m+1} V_{kn},$$

$$S_3(m,k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,m} V_{kn},$$

$$S_4(m,k,\ell)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{n,t,m}-\rho_{t,n,m})V_{kn}V_{\ell t}.$$

そして、$\xi_{i,j}(k,\ell)$,（$1\leq i,j\leq D+d$, $0\leq k,\ell\leq S-1$）を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\xi_{i,j}(k,\ell)&=(-1)^{m+n}\Big[S_1(m+n+\delta,k,\ell)+2\Big\{\sum_{a=1}^{m}(-1)^a S_2(m+n+\delta-a,\ell)\\&\quad\times S_3(2a,k)+\sum_{a=1}^{n}(-1)^a S_2(m+n+\delta-a,k)\,S_3(2a,\ell)\Big\}\\&\quad+2\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n}(-1)^{a+b}V_{m+n+\delta-a-b}\,S_3(2a,k)\,S_3(2b,\ell)\Big],\\&\qquad\qquad(i=2m+\delta,\ j=2n+\delta)\\&=\sum_{n=0}^{m-1}2(-1)^n S_3(i-2m+n,k)\,S_3(i-n,\ell)\\&\quad+(-1)^m\{S_3(i-m,k)\,S_3(i-m,\ell)+S_4(i-m,k,\ell)\},\\&\qquad\qquad(i=j+2m+1,\ m\geq0)\\&=\xi_{j,i}(\ell,k),\qquad\qquad(j=i+2m+1,\ m\geq0),\end{aligned}$$

ここで δ は 0 または 1、m,n は、$\delta=0$ の時、$m,n\geq1$,

$\delta=0$ の時は、$m,n\geq0$ である。

この時、$\tilde{D}_T^{-1}U_T'U_T\tilde{D}_T^{-1}$ の漸近分布を得る。

<u>命題 A.2.</u>　U は $(D+d)S\times(D+d)S$ の random な行列で、

$$U=\begin{bmatrix}U_{11}&U_{12}&\cdots&U_{1,D+d}\\U_{21}&U_{22}&\cdots&U_{2,D+d}\\\vdots&\vdots&&\\U_{D+d,1}&U_{D+d,2}&\cdots&U_{D+d,D+d}\end{bmatrix}$$

と定義する　U_{ij} は、$S\times S$ 行列で、その (k,ℓ) 要素 $u_{ij}(k,\ell)$ は、

$$u_{ij}(k,\ell)=\sum_{n=0}^{S-1}\xi_{i,j}(\overline{\ell-k+n},n)/S^{i+j},$$

とする。$\bar{i}$は $\bar{i}=i-[i/s]\times S$ で定義する。この時

$$\tilde{D}_T^{-1}\tilde{U}_T'\tilde{U}_T\tilde{D}_T^{-1}\xrightarrow[L]{}\tilde{U},\ (T\to\infty)$$

が成立する。

（略証） $\{\tilde{u}_{i,t}\}$, $0\le i\le S-1$, を

$$\tilde{u}_{i,t}=u_{(t-1)S+i},\ (t-1)S+i\ge 1,$$
$$=\quad 0\quad ,\ \text{otherwise}$$

で定義する。$\{\tilde{e}_{i,t}\}$も同様に定義すれば、$\nabla^{D+d}\tilde{u}_{i,t}=\tilde{e}_{i,t}$, $t\ge 1$, が成立する。すなわち$\{\tilde{u}_{i,t}\}$, $0\le i\le S-1$, は独立なS個のARIMA $(0, D+d, 0)$ processesとなるので、Hasza and Fuller (1979), (1982), Yajima (1982)と同様の方法で、結論を得る。

最後に、補題A.1を繰り返し適用し、命題A.1とA.2を結合すると、$D_T^{-1}W_T'W_TD_T$ の漸近分布を得る。

<u>定理 A.1.</u> $H \equiv \mathrm{diag}(\lambda^*, S\lambda^*, \cdots, S^{d-1}\lambda^*)$, $d\times d$,

$J_s \equiv (1, 1, \cdots, 1)'$, $S\times 1$,

とおく。この時

$$D_T^{-1}W_T'W_TD_T^{-1}\xrightarrow[L]{}\begin{bmatrix} I_D\otimes\Lambda & 0 \\ 0 & H\otimes J_s' \end{bmatrix}\tilde{U}\begin{bmatrix} I_D\otimes\Lambda' & 0 \\ 0 & H\otimes J_s \end{bmatrix}$$

$(T\to\infty)$ が成立する。ここでI_Dは$D\times D$の単位行列，$\otimes$はKronecker productを意味する。（右辺を§2, §3ではWとする。）

References

Box, G. E. P. and Jenkins, J. M. (1976) *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (Revised ed.) San Francisco:Holden Day.

Evans, G. B. A. and Savin, N. E. (1981) The calculation of the limiting distribution of the least squares estimator of the parameter in a random walk model. *Ann. Statist.* 9, 1114-1118.

Hamilton, E. J. and Watts, D. G. (1978) Interpreting partial autocorrelation function of seasonal time series models. *Biometrika* 65, 135-140.

Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979) The determination of the order of an autoregression. *J. R. Statist. Soc. B* 41, 190-195.

Hasza, D. P. and Fuller, W. A. (1979) Estimation for autoregressive processes with unit roots. *Ann. Statist.* 7, 1106-1120.

Hasza, D. P. (1980) The asymptotic distribution of the sample autocoorelations for an integrated ARMA process. *J. Amer. Statist. Assoc.* 70, 349-352.

Hasza, D. P. and Fuller, W. A. (1982) Testing for nonstationarity parameters specification in seasonal time series models. *Ann. Statist.* 10, 1209-1216.

Rao, M. M. (1978) Asymptotic distribution of an estimator of the boundary parameter of an unstable process. *Ann. Statist.* 6, 185-190.

Shibata, R. (1976) Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion. *Biometrika* 63, 117-126.

White, J. S. (1958) The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case. *Ann. Math. Statist.* 29, 188-197.

Yajima, Y. (1982) Estimation of the degree of differencing of an ARIMA process by an AR model fitting. (submitted)